

Calcul de topographies pour la production d'énergie houlomotrice

Julien Salomon, Sebastián Reyes Riffo

CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Octobre 2016

Cadres institutionnels :

- Université Paris-Dauphine, UMR 754 : Centre de REcherche en MATHématiques de la Décision (CEREMADE),
- Équipe INRIA ANGE (Analyse Numérique - Géophysique - Ecologie),
- A.N.R - F.E.M. : Projet HYFLOEFLU (HYdroliennes FLOttantes et Énergie FLUviale),
- PME-TPE : Hydrotube Energie.



Maturité des mathématiques appliquées pour la géophysique :

simulations → *prediction/optimisation*.

- 1 Couplage Simulation/Optimisation
- 2 Schémas de discrétisation
- 3 Optimisation
- 4 Ouvertures

- Simulation $Eq(u(x, t), \text{parametres}) = 0$
→ critères de stabilité :

$$m \leq c(\text{parametres}) \leq M.$$

- Optimisation
→ mise à jour itérative de certains paramètres :

$$\text{parametres}^{k+1} = \varphi(\text{parametres}^k).$$

Problème : la mise à jour **doit** préserver les critères de stabilité !

Une exemple : comment déplacer efficacement une foule ?



Formulation du problème :

$$\inf_v E(v),$$

avec

$$E(v) := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \|v(t, x)\|^2 \rho(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \rho(1, x) dx$$

avec la dynamique à simuler (Équation de Fokker-Planck) :

$$\partial_t \rho - \varepsilon^2 \Delta \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \text{ on } (0, 1) \times \mathbb{R}^d$$

$$\rho(0, \cdot) = \rho_0$$

- Au niveau du modèle : $\rho \geq 0$
- Au niveau discret : ???

→ **on doit choisir un schéma de simulation préservant la positivité!** (quitte à ne pas rechercher une approximation de haut degré)

Couplage Simulation/Optimisation

Caractérisation de site : un problème de couplage.



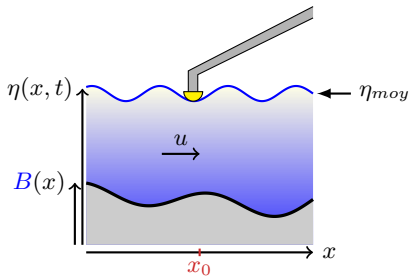
Caractérisation de site : un problème de couplage.

$$\max E(B) := \int_0^T \left(\frac{\partial \eta(x_0, t)}{\partial t} \right)^2 dt,$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \operatorname{div} (g(\eta_{moy} - B) \nabla(\eta)) = 0.$$

En plus du couplage, névroses habituelles des matheux ...

- **Théorie** : Existence, unicité, régularité d'une solution ?
- **Analyse numérique** : Stabilité par rapport au paramètre optimisé ?
- **Calcul efficace** : optimisation computationnelle



- ① Couplage Simulation/Optimisation
- ② Schémas de discrétisation
- ③ Optimisation
- ④ Ouvertures

Dynamique : le modèle

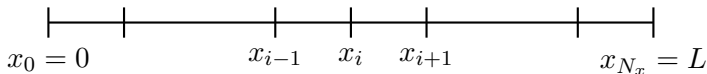
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \operatorname{div} (g(\eta_{moy} - B)\nabla(\eta)) = 0 \\ \eta(0, x) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(0, x) = 0 \\ \eta(t, 0) = f(t) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t}(t, L) + \sqrt{gB(L)} \frac{\partial \eta}{\partial x}(t, L) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

Discretisation en espace : méthode des éléments finis

On discrétise (P) par l'utilisation des éléments \mathbb{P}_1 .

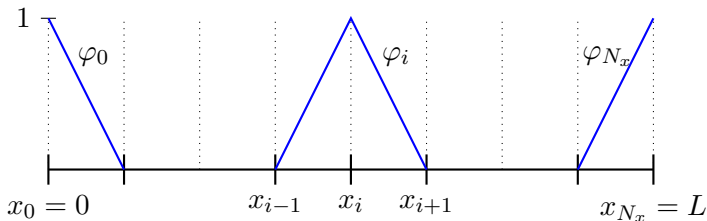
Discretisation en espace : méthode des éléments finis

On discrétise (P) par l'utilisation des éléments \mathbb{P}_1 . Soit N_x un entier positif, un pas $h = L/N_x$ et une grille uniforme



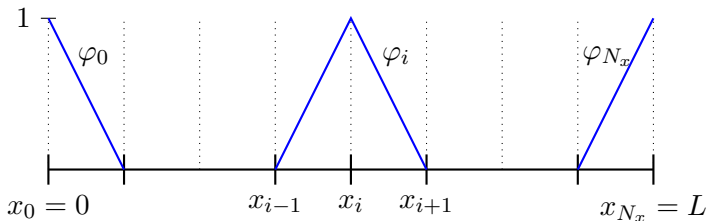
Discretisation en espace : méthode des éléments finis

On discrétise (P) par l'utilisation des éléments \mathbb{P}_1 . Soit N_x un entier positif, un pas $h = L/N_x$ et une grille uniforme



Discretisation en espace : méthode des éléments finis

On discrétise (P) par l'utilisation des éléments \mathbb{P}_1 . Soit N_x un entier positif, un pas $h = L/N_x$ et une grille uniforme

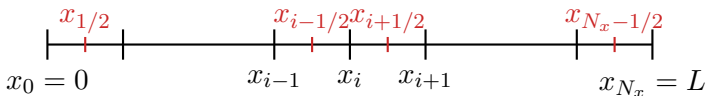


On peut alors approcher

- $\eta(t, x)$ par $\eta_h(t, x) = \sum_{i=0}^{N_x} \eta_i(t) \varphi_i(x)$

Discretisation en espace : méthode des éléments finis

On discrétise (P) par l'utilisation des éléments \mathbb{P}_1 . Soit N_x un entier positif, un pas $h = L/N_x$ et une grille uniforme



On peut alors approcher

- $\eta(t, x)$ par $\eta_h(t, x) = \sum_{i=0}^{N_x} \eta_i(t) \varphi_i(x)$

- $B(x)$ par $B(x) = \sum_{k=0}^{N_x-1} B(x_{k+1/2}) 1_{\{x_k \leq x \leq x_{k+1}\}}$

Discretisation en temps : Newmark scheme

On obtient une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} M\ddot{\eta}(t) + D\dot{\eta}(t) + K\eta(t) = F \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dans notre cas

- $\eta(t) = (\eta_j(t))_{0 \leq j \leq N_x}$

Discretisation en temps : Newmark scheme

On obtient une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} M\ddot{\eta}(t) + D\dot{\eta}(t) + K\eta(t) = F \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dans notre cas

- $\eta(t) = (\eta_j(t))_{0 \leq j \leq N_x}$
- M est symétrique, positive, à diagonale dominante.

Discretisation en temps : Newmark scheme

On obtient une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} M\ddot{\eta}(t) + D\dot{\eta}(t) + K\eta(t) = F \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dans notre cas

- $\eta(t) = (\eta_j(t))_{0 \leq j \leq N_x}$
- M est symétrique, positive, à diagonale dominante.
- $K = K(B)$ est symétrique, positive.

Discretisation en temps : Newmark scheme

On obtient une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} M\ddot{\eta}(t) + D\dot{\eta}(t) + K\eta(t) = F \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dans notre cas

- $\eta(t) = (\eta_j(t))_{0 \leq j \leq N_x}$
- M est symétrique, positive, à diagonale dominante.
- $K = K(B)$ est symétrique, positive.
- $D = (d_{ij})_{i,j \in \{0, \dots, N_x\}}$, $d_{ij} = \begin{cases} \sqrt{gB(x_{N_x-1/2})} & \text{if } i = j = N_x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Discretisation en temps : Newmark scheme

Soit N_t un entier positif, $\Delta t = T/N_t$ un pas de temps, $t_n = n\Delta t$ for $n \in \mathbb{N}$, et η^n , $\dot{\eta}^n$, $\ddot{\eta}^n$ les approximations au temps t^n de $\eta(t^n)$, $\dot{\eta}(t^n)$ et $\ddot{\eta}(t^n)$.

Discretisation en temps : Newmark scheme

Soit N_t un entier positif, $\Delta t = T/N_t$ un pas de temps, $t_n = n\Delta t$ for $n \in \mathbb{N}$, et η^n , $\dot{\eta}^n$, $\ddot{\eta}^n$ les approximations au temps t^n de $\eta(t^n)$, $\dot{\eta}(t^n)$ et $\ddot{\eta}(t^n)$.

Newmark propose la discrétisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{\eta}^n + D\dot{\eta}^n + K\eta^n = F^n \\ \dot{\eta}^{n+1} = \dot{\eta}^n + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{\eta}^n + \gamma \ddot{\eta}^{n+1} \right) \\ \eta^{n+1} = \eta^n + \Delta t \dot{\eta}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left((1 - 2\beta) \ddot{\eta}^n + 2\beta \ddot{\eta}^{n+1} \right) \\ \eta^0 = 0 \\ \dot{\eta}^0 = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

with $0 \leq 2\beta \leq 1$ and $0 \leq \gamma \leq 1$.

Discretisation en temps : Newmark scheme

Le schéma est *in fine* de la forme :

$$AX^{n+1} + BX^n + CX^{n-1} = F,$$

avec $X^n = \begin{pmatrix} \ddot{\eta}^n \\ \dot{\eta}^n \\ \eta^n \end{pmatrix}.$



L'étude de stabilité revient à résoudre le problème aux valeurs propres quadratique :

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0.$$

Theorem

Soit $\tau \in [0, 1)$, $\gamma \geq \max \left\{ 0, \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{(1-\tau)^2} \right) \right\}$, β , Δt et h les paramètres de discrétisation.

Si

$$(i) \quad 2\beta \geq 2\gamma \left(\frac{1-\tau}{2-\tau} \right) + \frac{\tau(1-\tau)}{(2-\tau)^2}, \text{ or}$$

$$(ii) \quad 2\beta < 2\gamma \left(\frac{1-\tau}{2-\tau} \right) + \frac{\tau(1-\tau)}{(2-\tau)^2} \text{ and}$$

$$\frac{6g\Delta t^2}{h^2} \max_{0 \leq i \leq N_x} \left\{ \frac{B(x_{i-1/2}) + B(x_{i+1/2})}{2} \right\} \leq \frac{1}{2\gamma \left(\frac{1-\tau}{2-\tau} \right) + \frac{\tau(1-\tau)}{(2-\tau)^2} - 2\beta}$$

alors

$$\max_{\lambda \in \sigma(L_0) - \{1\}} \|\lambda\| \leq 1 - \tau$$

Exemple : $\tau = 0$, alors on obtient comme conditions

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \text{ and } \beta \in \left[\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2C}, \frac{\gamma}{2} \right),$$

$$\text{avec } C = \frac{6g\Delta t^2}{h^2} \max_{0 \leq i \leq N_x} \left\{ \frac{B(x_{i-1/2}) + B(x_{i+1/2})}{2} \right\}.$$

- ① Couplage Simulation/Optimisation
- ② Schémas de discrétisation
- ③ Optimisation**
- ④ Ouvertures

D'où l'algorithme : étant donné $\lambda > 0$, supposons connaître B^k et des paramètres $\tau^k, \beta^k, \Delta t^k, h^k$

① Adaptation des paramètres :

① Calcul du gradient ∇E avec

$$E(v) := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \|v(t, x)\|^2 \rho(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \rho(1, x) dx$$

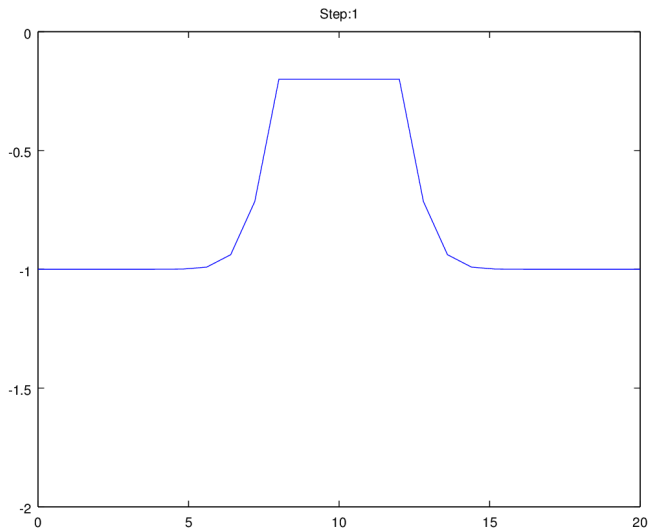
② Adaptation des paramètres

$\tau = \tau^{k+1}, \beta = \beta^{k+1}, \Delta t = \Delta t^{k+1}, h = h^{k+1}$ pour satisfaire les conditions.

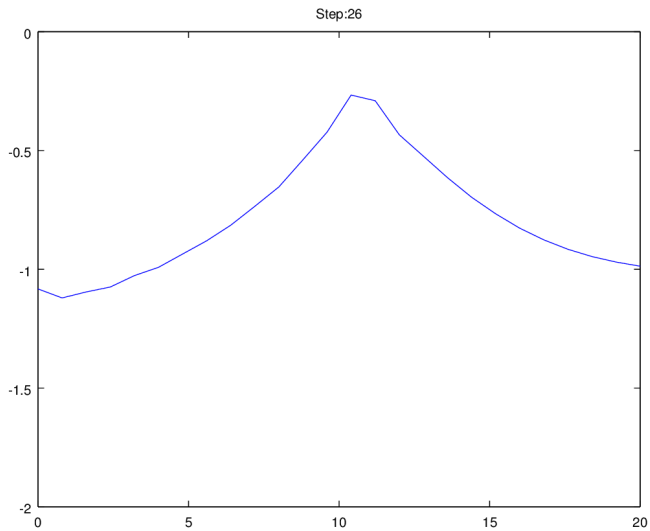
② Mise à jour de la bathymétrie

$$B^{k+1} = B^k + \lambda \nabla E(B^k).$$

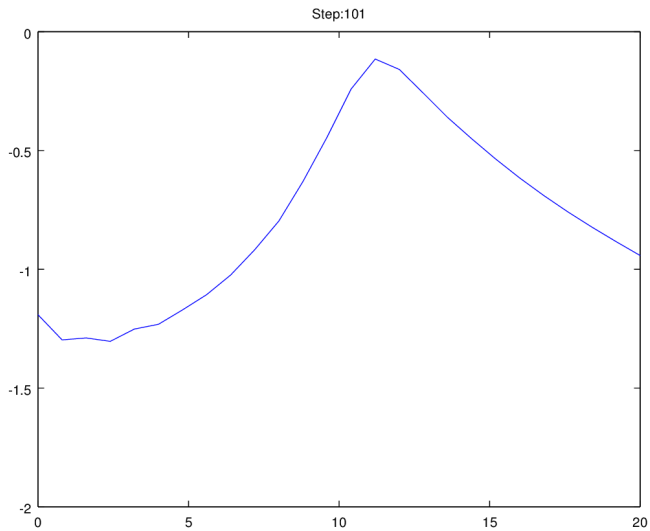
Caractérisation de site



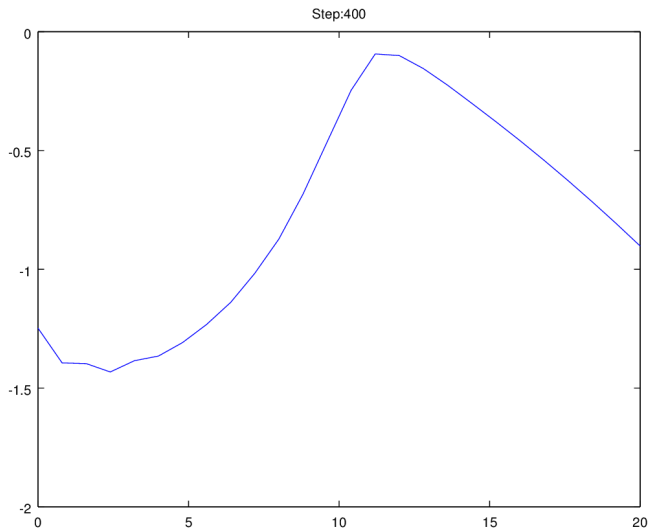
Caractérisation de site



Caractérisation de site



Caractérisation de site



- ① Couplage Simulation/Optimisation
- ② Schémas de discrétisation
- ③ Optimisation
- ④ Ouvertures

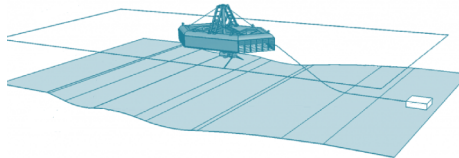
Autre exemple de "numérisation" de dispositif (1) : **production de micro-algues à vocation énergétique**



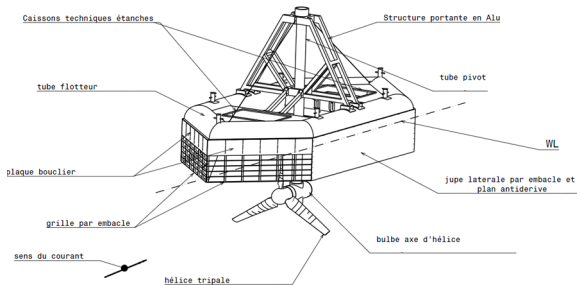
- **Difficulté supplémentaire :**
couplage avec modèle biologique
- **Paramètres à optimiser :**
géométrie, vitesse de circulation, énergie consommée
- **Nombreux facteurs variables :** concentration en algues, ensoleillement, forçage par le vent, etc.

→ IPL "*Algae in silico*"

Autre exemple de "numérisation" de dispositif (2) : hydrolienne fluviale



Exemple d'installation d'une hydrolienne dans un fleuve unidirectionnel



Le prototype démonstrateur

- 30kW pour un écoulement de 2 m/s
- réversible
- connecté à internet, nombreux capteurs
- en fonctionnement continu depuis novembre

⇒ Dans ce cas le critère sur la bathymétrie est la **maximisation ponctuelle de l'énergie cinétique.**

- Système fluides \rightarrow Équations hyperboliques
- Équation hyperbolique \rightarrow Condition de stabilité
- Couplage avec boucle d'optimisation \rightarrow Modification de la condition de stabilité = **Danger !**